注意: 適合度檢定中，若有 d 個母體參數需被估計，則在 H_0 為真之情形下，檢定統計量為自由度 k-1-d 之卡方分佈，其中 k 代表類別的個數。

3. 獨立性檢定 (Test for Independence)

若 A 和 B 代表兩種不同屬性(attribute)，其又各分為 $A_1, A_2,\ldots, A_r$ 以及 $B_1, B_2,\ldots, B_s$ 個類別，而 f_{ij} 代表在 n 次獨立實驗中，其結果落在屬性 A 的類別 A_i 和屬性 B 的類別 B_j，1≤ i ≤ r, 1≤ j ≤s。這種資料稱為 r×s 列聯表(contingency table)，詳細情形如下:

$A\backslash B$	B_1	B_2	…	B_j	….	B_s	列和
A_1	f_{11}	f_{12}		f_{1j}		f_{1s}	$f_{1.}$
A_2	f_{21}	f_{22}		f_{2j}		f_{2s}	$f_{2.}$
.	.	.		.		.	
A_i	f_{i1}	f_{i2}		f_{ij}		f_{is}	$f_{i.}$
.	.	.		.		.	
A_r	f_{r1}	f_{r2}		f_{rj}		f_{rs}	$f_{r.}$
行和	$f_{.1}$	$f_{.2}$		$f_{.j}$		$f_{.s}$	

在上面的資料中 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}f_{ij}=n$，同時定義 $f_{i.}=\sum_{j=1}^{s}f_{ij}$、$f_{.j}=\sum_{i=1}^{r}f_{ij}$、$p_{ij}$ =每一個實驗結果為類別A_i和B_j的機率、$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}p_{ij}=1$、$p_{i.}=\sum_{j=1}^{s}p_{ij}$和 $p_{.j}=\sum_{i=1}^{r}p_{ij}$，則 $\hat{p}_{i.}=f_{i.}/n$ 且 $\hat{p}_{.j}=f_{.j}/n$。現想要檢定(顯著水準 $\alpha = 5\%$)

H_0: A 和 B 兩種屬性為獨立的 ($p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$，$1 \le i \le r, 1 \le j \le s$) 對

H_1: A 和 B 兩種屬性不為獨立的 (至少存在一個 $p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$)

當 H_0 為真，則 n 次獨立實驗結果為類別 A_i和B_j的期望個數

$e_{ij}=np_{ij} = n\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j} = n(f_{i.}/n)(f_{.j}/n)= f_{i.}f_{.j}/n$，$1 \le i \le r, 1 \le j \le s$，而檢定統計量為 $Q=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij} \approx \chi^2_{(r-1)(s-1)}$。當檢定統計量觀測值 $q=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(f_{ij} - e_{ij})^2/e_{ij} > \chi^2_{(r-1)(s-1),1-\alpha}$，則拒絕 H_0，否則不拒絕。此時 p-值$\approx P(\chi^2_{(r-1)(s-1)} > q)$，亦可由 p-值大小來判斷是否拒絕 H_0。

<u>注意</u>: .

(a) 若某些 $e_{ij} < 5$ 時，則必須將行或列合併使期滿足 $e_{ij} > 5$，

$1 \le i \le r, 1 \le j \le s$。

(b) 2×2 的列聯表其檢定統計量需修正為 $Q=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(|f_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2/e_{ij} \approx \chi^2_{(2-1)(2-1)}=\chi^2_1$。

例 欲知買不買車是否與其收入的高低有關，隨機調查 180 人得如下結果:

	低收入	中收入	高收入	列和
買車	25(35)	35(35)	45(35)	105
不買車	35(25)	25(25)	15(25)	75
行和	60	60	60	

給定顯著水準 $\alpha = 5\%$，想要檢定

H_0: 買不買車與其收入的高低無關 對 H_1: 買不買車與其收入的高低有關

檢定統計量觀測值 q=$(25-35)^2/35$+$(35-35)^2/35$+$(45-35)^2/35$+$(35-25)^2/25$+$(25-25)^2/25$+$(15-25)^2/25$=13.714>5.99=$\chi^2_{(3-1)(2-1),0.95}$ ，所以拒絕 H_0。p-值≈$P(\chi^2_2 > 13.714)$=0.00105。

變異數分析

我們常想要檢定 k 所大學之大學畢業生的平均起薪是否有差異，若有差異，則排序又如何; k 種基金的平均報酬率是否有所不同，若有不同，則排序又如何? 這些都是比較 k 個母體平均數的問題，且 k 可能比 2 大，本節會介紹變異數分析方法來比較多個不同母體平均數的差異，通常稱為 ANOVA (analysis of variance)。

1 單因子變異數分析

模式:

$$Y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij}，1\le i \le k，1\le j \le n_i，$$

其中 Y_{ij}=第 i 個母體(處理，treatment)之第 j 觀測值，$1\le j \le n_i$，$1\le i \le k$。

N=總樣本數=$n_1+\ldots\ldots+n_k$

μ_i =第 i 個母體(處理)的平均值

ε_{ij}: 為獨立同態的 $N(0, \sigma^2)$

檢定 H_0: $\mu_1 = \cdots = \mu_k$ 對 H_1: 至少有兩個母體平均數不等

定義總平均 $\bar{Y}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/ N$ 和第 i 個母體的樣本平均值

$\bar{Y_i}=\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/n_i$則

$$Y_{ij} - \bar{Y} = (Y_{ij} - \bar{Y_i}) + (\bar{Y_i} - \bar{Y})。$$

上式平方再取總和可得

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{Y_i} - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y_i})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y_i} - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y_i})^2 \text{ 或}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} {Y_{ij}}^2 - N\,\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\bar{Y_i}^2 - N\bar{Y}^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} {Y_{ij}}^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i\bar{Y_i}^2 。$$

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y})^2$稱為總平方和 SST(total sum of squares)，

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{Y_i} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{Y_i} - \bar{Y})^2$稱為處理平方和 SSTR (treatment sum of squares)或組間平方和(between groups sum of squares)，而 $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y_i})^2$則稱為誤差平方和(error sum of squares) 或組內平方和(within group sum of squares)。因此

SST=SSTR+SSE (且 SSTR 和 SSE 相互獨立)

總平方和=組間平方和+組內平方和

總變異=組間變異+組內變異

df (SST)= $N-1$，df (SSTR)= $k-1$，df (SSE)= $N - k$

MSTR=SSTR/($k-1$)(組間均方和或處理均方和)

MSE=SSE/($N-k$)(組內均方和或誤差均方和)

當 H_0 為真時，檢定統計量

$$F=\frac{MSTR}{MSE}=\frac{SSTR/(\,k-1)}{SSE/(\,N\,-\,k)}\sim F_{N\,-\,k}^{k-1}\text{。}$$

因此當檢定統計量觀測值 $f>F_{N\,-\,k,1-\alpha}^{k-1}$，拒絕 H_0，否則不拒絕，其中

$P(F_{N\,-\,k}^{k-1}<F_{N\,-\,k,1-\alpha}^{k-1})=\ 1-\alpha$。此時 p-值$=P(F_{N\,-\,k}^{k-1}>f)$。

<u>注意</u>: 當$k=2$，則此檢定簡化為有相同變異數的二母體母體平均數是否相同之檢定。

例 1 想要比較不同包裝對產品銷售的影響，將三種不同包裝甲、乙和丙隨機鋪貨在隨機選取的 15 家超商內，每種包裝有 5 家超商，半年後收集每種包裝之銷售量如下:

甲:	12	18	10	18	17
乙:	14	12	13	13	13
丙:	19	17	21	23	20

給定顯著水準 $\alpha=5\%$，想要檢定

H_0: 甲、乙和丙三種不同包裝的銷售量母體平均數相等　對

H_1: 至少有兩種包裝銷售量母體平均數不等

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}{Y_{ij}}^2=12^2+18^2+\ldots\ldots+23^2+20^2=4048$，

$\bar{Y}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}Y_{ij}/\,N=(12+18+\cdots+23+20)/15=16$，

$\overline{Y_1}$=(12+18+10+18+17)/5=15，$\overline{Y_2}$=(14+12+13+13+13)/5=13，

$\overline{Y_3}$=(19+17+21+23+20)/5=20，

SST=$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} {Y_{ij}}^2 - N\bar{Y}^2 = 4048 - 15(16)^2$=208，

SSTR=$\sum_{i=1}^{3} n_i\overline{Y_\iota}^2 - N\bar{Y}^2$=5(15)²+5(13)²+5(20)²−15(16)²=130，

SSE=SST-SSTR=208-130=78，

$f=\frac{MSTR}{MSE}=\frac{SSTR/(k-1)}{SSE/(N-k)}=\frac{130/2}{78/12}=10>3.885=F_{12,0.95}^{2}$，因此拒絕 H_0。此時 p-value= $P(F_{12}^{2}>10)$=0.0028。

2 雙因子變異數分析(無交互作用，no interaction)

模式:

$Y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_i+\varepsilon_{ijk}$，$1\le i\le a$，$1\le j\le b$，$1\le k\le n_{ij}$，

其中 Y_{ijk}=第 i 個處理(treatment)，第 j 個集區下之第 k觀測值，$1\le i \le a$，$1\le j\le b$，$1\le k\le n_{ij}$。

N=總樣本數=$n_{11}+\ldots\ldots+n_{ab}$

μ =每一個資料Y_{ijk}未受處理和集區影響前的母體平均值

α_i=第 i 個處理的影響效果，$1\le i\le a$

β_i=第 j 個集區的影響效果，$1\le j\le b$

ε_{ijk}: 為獨立同態的 $N(0,\sigma^2)$

定義總平均 $\bar{Y}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}/N$ 、$\bar{Y}_{ij}=\sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}/n_{ij}$、

$\bar{Y}_{\iota.}=\sum_{i=1}^{a}\bar{Y}_{ij}/a$ 和$\bar{Y}_{.j}=\sum_{j=1}^{b}\bar{Y}_{ij}/b$ 。

則

$Y_{ijk}-\bar{Y}=(\overline{Y_{i.}}-\bar{Y})+(\overline{Y_{.j}}-\bar{Y})+(Y_{ijk}-\overline{Y_{i.}}-\overline{Y_{.j}}+\bar{Y})$。

上式平方再取總和可得

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(Y_{ijk}-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(\overline{Y_{i.}}-\bar{Y})^2$

$+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(\overline{Y_{.j}}-\bar{Y})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(Y_{ijk}-\overline{Y_{i.}}-\overline{Y_{.j}}+\bar{Y})^2$

$=\sum_{i=1}^{a}n_{i.}(\overline{Y_{i.}}-\bar{Y})^2+\sum_{j=1}^{b}n_{.j}(\overline{Y_{.j}}-\bar{Y})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(Y_{ijk}-\overline{Y_{i.}}-$

$\overline{Y_{.j}}+\bar{Y})^2$，其中 $n_{i.}=\sum_{j=1}^{b}n_{ij}$ ，$n_{.j}=\sum_{i=1}^{a}n_{ij}$ 。即

SST=SSTR+SSB+SSE (且 SSTR、SSB 和 SSE 三者相互獨立)

總平方和=處理平方和+區集平方和+誤差平方和

總變異=處理變異+區集變異+誤差變異

df (SST)= $N-1$，df (SSTR)= $a-1$，df (SSB)= $b-1$ ，df (SSE)= $N-a-b+1$。

MSTR=SSTR/($a-1$)(處理均方和)

MSB=SSB/($b-1$)(區集均方和)

MSE=SSE/($N-a-b+1$)(組內均方和或誤差均方和)

給定顯著水準 $\alpha=5\%$，想要檢定

H_0: $\alpha_1=\ldots=\alpha_a$ (a 個處理的效果無顯著差異) 對

H_1: $\alpha_l\neq\alpha_m$ ，$1\leq l$，$m\leq a$ (至少有兩個處理的效果有顯著差異)

當 H_0 為真時，檢定統計量

$$F=\frac{MSTR}{MSE}=\frac{SSTR/(\,a-1)}{SSE/(\,N\;-\;a-b+1)}\sim F^{a-1}_{N\,-\,a-b+1}\text{。}$$

因此當檢定統計量觀測值 $f > F^{a-1}_{N\,-\,a-b+1,1-\alpha}$，拒絕 H_0，否則不拒絕。

此時 p-值$= P(F^{a-1}_{N\,-\,a-b+1} > f)$。同理檢定

H_0: $\beta_1 = \ldots = \beta_b$ (b 個區集的效果無顯著差異) 對

H_1: $\beta_l \neq \beta_m$，$1 \leq\ l$，$m \leq b$ (至少有兩個區集的效果有顯著差異)

當 H_0 為真時，檢定統計量

$$F=\frac{MSTR}{MSE}=\frac{SSTR/(\,b-1)}{SSE/(\,N\;-\;a-b+1)}\sim F^{b-1}_{N\,-\,a-b+1}\text{。}$$

因此當檢定統計量觀測值 $f > F^{b-1}_{N\,--a-b+1,1-\alpha}$，拒絕 H_0，否則不拒絕。

此時 p-值$= P(F^{b-1}_{N\,-\,a-b+1} > f)$。

例 2 想要比較不同包裝對產品銷售的影響，將三種不同包裝甲、乙和丙隨機鋪貨在隨機選取的 18 家超商內，每種包裝有 6 家超商，其中 2 家在熱門地段，2 家在普通地段，而另 2 家在冷門地段。半年後收集每種包裝之銷售量如下:

地段\包裝	甲	乙	丙
熱門	12, 14	14, 12	19, 21
普通	18, 16	13, 13	18, 22
冷門	15, 15	11, 15	20, 20

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} Y_{ijk}^2 = 12^2+14^2+\ldots\ldots+20^2=4804$, $\bar{Y}=16$,

$\bar{Y}_{1.}=(12+14+18+16+15+15)/6=15$, $\bar{Y}_{2.}=13$, $\bar{Y}_{3.}=20$,

$\bar{Y}_{.1}$=(12+14+14+12+19+21)/6=15.333, $\bar{Y}_{.2}$=16.667, $\bar{Y}_{.3}$=16,

SST=$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}Y_{ijk}^{2}-N\bar{Y}^{2}$=4084−18(16)(16)=196,

SSTR=$n_{1.}\bar{Y}_{1.}^{2}+n_{2.}\bar{Y}_{2.}^{2}+n_{3.}\bar{Y}_{3.}^{2}-N\bar{Y}^{2}$=6(15^2)+6(13^2)+6(20^2) −18(16^2)
=156

SSB=$n_{.1}\bar{Y}_{.1}^{2}+n_{.2}\bar{Y}_{.2}^{2}+n_{.3}\bar{Y}_{.3}^{2}-N\bar{Y}^{2}$=6(15.333^2)+6(16.667^2)+6(16^2) −18(16^2)=5.333

SSE=SST-SSTR-SSB=196-156-5.333=34.667

H_0: α_1= … =α_3 (3 個不同包裝的效果無顯著差異) 對

H_1: $\alpha_l \neq \alpha_m$，$1 \leq l$，$m \leq 3$ (至少有兩個包裝的效果有顯著差異)

f=MSTR/MSE=(156/2)/(34.667/13)=29.25>3.086=$F_{13,0.95}^{2}$ (顯著水準 $\alpha = 5\%$)。因此拒絕 H_0。p-值= $P(F_{13}^{2} > 29.25) = 0.0000135$。

H_0: β_1= … =β_3 (3 個區集的效果無顯著差異) 對

H_1: $\beta_l \neq \beta_m$，$1 \leq l$，$m \leq 2$ (至少有兩個區集的效果有顯著差異)

f=MSB/MSE=(5.333/2)/(34.667/13)=1<3.086=$F_{13,0.95}^{2}$ (顯著水準 $\alpha = 5\%$)。因此不拒絕 H_0。p-值= $P(F_{13}^{2} > 1) = 0.3945$。

程式指令: chisq.test(x) # x 代表一個 r×s 的列聯表

例 欲知買不買車是否與其收入的高低有關。

```
> buy=c(25,35,45)
> nbuy=c(35,25,15)
> table=rbind(buy,nbuy);table
     [,1] [,2] [,3]
buy    25   35   45
nbuy   35   25   15
> chisq.test(table)

        Pearson's Chi-squared test

data:  table
X-squared = 13.714, df = 2, p-value = 0.001052
```

程式指令:

aov(y~factor, data=mydata) #從 mydata 的 y 那一欄(行)取到 y 的資料。

anova(aov(y~factor, data=mydata)) #列出詳細的單因子變異數分析表。

summary(aov(y~factor, data=mydata)) #列出詳細的單因子變異數分析表。

```
> y1=c(12,18,10,18,17)
> y2=c(14,12,13,13,13)
> y3=c(19,17,21,23,20)
> y=c(y1,y2,y3)
> pack=as.factor(rep(c("pack 甲","pack 乙","pack 丙"), times=c(5,5,5)))
> #產生包裝因子變數
> pack
 [1] pack 甲 pack 甲 pack 甲 pack 甲 pack 甲 pack 乙 pack 乙 pack 乙 pack 乙
[10] pack 乙 pack 丙 pack 丙 pack 丙 pack 丙 pack 丙
Levels: pack 乙 pack 丙 pack 甲
```

```
> aov(y~pack)
Call:
   aov(formula = y ~ pack)

Terms:
                pack Residuals
Sum of Squares   130        78
Deg. of Freedom    2        12

Residual standard error: 2.54951
Estimated effects may be unbalanced
> anova(aov(y~pack))
Analysis of Variance Table

Response: y
          Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
pack       2    130    65.0      10 0.002781 **
Residuals 12     78     6.5
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(aov(y~pack))
            Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
pack         2    130    65.0      10 0.00278 **
Residuals   12     78     6.5
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```