

STAT 2622 統計資料分析 作業五 (4/16 交)

1. 若兩個隨機變數 X 和 Y 滿足 $EX=\mu_x=-3$, $EY=\mu_y=10$, $Var(X)=\sigma_x^2=16$, $Var(Y)=\sigma_y^2=25$ 和 $Cov(X,Y)=17$ 。計算下列各值:
 - (a) $-6X$ 的期望值和變異數。
 - (b) $2X-7Y$ 的期望值和變異數。
 - (c) $10XY$ 的期望值是多少?
 - (d) $2X$ 和 $7Y$ 的共變異數和相關係數各為多少?
2. 假設血型 A 的人在某族群中約有 15%，利用中央極限定理試求下列各項之值。
 - (a) 50 人中 A 型的人數介於(不含)5 與(含)10 間的機率為何?
 - (b) 100 人中 A 型的人數介於(含)10 與(含)20 間的機率為何?
 - (c) 1000 人中 A 型的人數介於(不含)100 與(不含)200 間的機率為何?
 - (d) 在(c)中若不做連續修正，答案差很多嗎? 為什麼?
3. 假設 X_1, X_2, \dots, X_{10} 是一組從參數 $\lambda=2$ 的布瓦松(Poisson)隨機變數 X 取出的隨機樣本。
 - (a) 利用布瓦松分佈的定義，直觀猜測一下 $\sum_{i=1}^{10} X_i$ 是甚麼分佈，參數為多少?
 - (b) 試計算樣本平均數 $\bar{X}=\sum_{i=1}^{10} X_i/10$ 的(母體)平均數 和(母體)變異數。

(c) 利用中央極限定理和 R 軟體計算樣本平均數 \bar{X} 大於(不含)2 且小於等於 5 的機率。

(d) 利用中央極限定理和 R 軟體計算樣本和 $\sum_{i=1}^{10} X_i$ 大於(不含)20 的機率。

4. 假設 X_1, X_2, \dots, X_{30} 是一組從參數 $\theta=5$ 的指數(exponential)隨機變數 X 取出的隨機樣本。

(a) 利用指數分佈的定義，直觀猜測一下 $\sum_{i=1}^{30} X_i$ 是甚麼分佈，參數為多少? (提示: 變成有兩個參數)

(b) $X_1 - 2X_2 + 3X_3 - 4X_4 + 5X_5$ 的期望值和變異數各為多少?

(c) 利用中央極限定理和 R 軟體計算樣本平均數 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{30} X_i / 30$ 大於等於 5 且小於(不含)15 的機率。

(d) 利用中央極限定理和 R 軟體計算樣本和 $\sum_{i=1}^{30} X_i$ 小於(不含)150 的機率。

5. 利用 R 軟體設計一個卡方分佈自由度從 1, 2, ..., 25 且機率值為 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999 的分位值(quantile)表。

(a) 寫出你程式的 R code，並附上結果的表 (第一列為機率 0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995, 0.999，第一行為卡方分佈的自由度 1, 2, ..., 25)

(b) 從(a)的結果中若 $P(\chi_{23}^2 > a) = 0.005$ ，則 $a = ?$

(c) 接續(a)和(b)，若 $P(\chi_{13}^2 < b) = 0.975$ ，則 $a^2 + b^2 + 2ab = ?$