機率基本觀念: 一隨機(指非刻意安排下)試驗(觀察可能發生的結果之過程)所有可能出現結果之集合稱為「樣本空間」，通常以 *S* 表示，而每一種可能出現的結果稱為「樣本點」。

(1) 古典機率定義方法: 事件 *E* 的機率 $P(E)=\frac{\text{事件 E 的樣本點個數}}{\text{樣本空間的樣本點個數}}$。

例一 擲一骰子 1 次可能出現的點數。若出現任何點數機會相同，則 $P(1)=P(2)=\cdots=P(6)=1/6$，$P(\text{出現偶數點})=3/6=1/2$。

例二 從 52 張撲克牌中隨機抽出 5 張。$P(\text{5 張全為紅心})=\binom{13}{5}/\binom{52}{5}$，

$P(\text{5 張均大於 10 點})=\binom{12}{5}/\binom{52}{5}$。

例三 大樂透(從 01~49 中任選 6 個號碼進行投注)每次隨機開出 6 個號碼加一個特別號(只適用貳獎、肆獎、陸獎和柒獎)。

頭獎(6 個號碼完全相同): 投注一張(50 元)中頭獎機率 $=\binom{6}{6}\binom{1}{0}\binom{42}{0}/\binom{49}{6}=1/13{,}983{,}816$。(基乎不可能中獎，拿 50 元買一杯珍珠奶茶比較實在!)

貳獎(5 個號碼相同+特別號): 投注一張中貳獎機率 $=\binom{6}{5}\binom{1}{1}\binom{42}{0}/\binom{49}{6}=1/2{,}330{,}636$。

叁獎(5 個號碼相同): 投注一張中叁獎機率$=\binom{6}{5}\binom{1}{0}\binom{42}{1}/\binom{49}{6}\approx 1/55{,}491.3$。

肆獎(4 個號碼相同+特別號): 投注一張中肆獎機率=$\binom{6}{4}\binom{1}{1}\binom{42}{1}/\binom{49}{6} \approx$ $1/22{,}196.5$。

伍獎(4 個號碼相同，獎金 2,000 元): 投注一張中肆獎機率 =$\binom{6}{4}\binom{1}{0}\binom{42}{2}/\binom{49}{6} \approx 1/1802.8$。

陸獎(3 個號碼相同+特別號,獎金 1,000 元): $\binom{6}{3}\binom{1}{1}\binom{42}{2}/\binom{49}{6} \approx 1/812.1$。

柒獎(2 個號碼相同+特別號,獎金 400 元): $\binom{6}{2}\binom{1}{1}\binom{42}{3}/\binom{49}{6} \approx 1/81.2$。

普獎(3 個號碼相同，獎金 400 元): $\binom{6}{3}\binom{1}{0}\binom{42}{3}/\binom{49}{6} \approx 1/60.9$。

(2) 相對次數方法(機率=相對次數之極限):

例一 擲一均勻骰子 *N* 次,當 *N* 夠大時,則出現 1 點之機率趨近 1/6。

例二 丟二均勻銅板 *N* 次，當N夠大時，則出現(正，正) 之機率趨近 1/4。

注意: A. 不能假設任何人得某特定流感痊癒之機率相同，也不可假設相同年齡層機率相同，須視個人病歷資料而定。B. 火星探測器登陸火星，不能假設成功與否機率各為 1/2，須視各種條件及當天天氣狀況。

(3) 近代的定義(Kolmogorov, 1933)

機率的三個公理(基本假設):

1. P(樣本空間)=$P(S)$=1。

2. 對於任何事件 $E \subseteq S$，$P(E) \geq 0$。

3. 對於事件 E_1，E_2，⋯ ，E_k，若兩兩相互排斥(即 $E_i \cap E_j = \emptyset$，$i \neq j$)，則

$P\left(\cup_{l=1}^{k} E_l\right) = \sum_{l=1}^{k} P(E_l)$。

利用這三個公理可推導得到:

1. 對任何事件 E， $P(E^c) = 1 - P(E)$。

2. $P(\emptyset) = 0$。

3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$。

4. $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$。

條件機率: 如果 $P(E) \neq 0$，定義條件機率 $P(D|E) = P(D \cap E)/P(E)$。

若 D 與 E 相互獨立(即 $P(D|E) = P(D)$)，則 $P(D \cap E) = P(D)P(E)$。

貝氏定理(Bayes Theorem，條件機率的應用): 若 E_1，E_2，⋯ ，E_k 兩兩相互排斥(即 $E_i \cap E_j = \emptyset$，$i \neq j$)且 $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = S$，則 $P(E_i|D) = P(D|E_i)P(E_i)/\sum_{l=1}^{k} P(D|E_l)P(E_l)$。

例一 擲一銅板 5 次，則至少出現 2 次正面之機率為多少?

例二 某公司有 A、B、C、D 四個工廠，A 產能佔 30%；B 產能佔 35%；C 產能佔 20%；D 產能佔 15%。A 廠之不良率為 0.3%；B 廠之不良率為 0.2%；C 廠之不良率為 0.5%；D 廠之不良率為 0.4%，試求:

(1) 該公司之總不良率為多少?

(2) 隨機抽取該公司產品一件，若該產品為不良品，則該產品從 C 工廠生產之機率為何?